

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \cdot \log_{x+5}(6-x) \leq 0, \\ 25^{x^2-2x+10} - 0,2^{2x^2-4x-80} \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $\log_{4-x}(x+4) \cdot \log_{x+5}(6-x) \leq 0$.

Значения x , при которых определено неравенство: $-4 < x < 3$; $3 < x < 4$.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $-4 < x < 3$. Получаем, что $\log_{x+5}(6-x) > 0$; $4-x > 1$, тогда

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \cdot \log_{x+5}(6-x) \leq 0, & \begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \leq 0, & \begin{cases} 0 < x+4 \leq 1, \\ -4 < x < 3, \end{cases} \\ -4 < x < 3; & \begin{cases} -4 < x < 3; \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

откуда $-4 < x \leq -3$.

Второй случай: $3 < x < 4$. Получаем, что $\log_{4-x}(x+4) < 0$; $\log_{x+5}(6-x) > 0$, следовательно, при $3 < x < 4$ первое неравенство исходной системы верно.

Решение первого неравенства исходной системы: $-4 < x \leq -3$; $3 < x < 4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\begin{aligned} 25^{x^2-2x+10} - 0,2^{2x^2-4x-80} \leq 0; & \quad 5^{2x^2-4x+20} \leq 5^{-2x^2+4x+80}; \\ 2x^2-4x+20 \leq -2x^2+4x+80; & \quad x^2-2x-15 \leq 0, \end{aligned}$$

откуда $-3 \leq x \leq 5$.

Решение второго неравенства исходной системы: $-3 \leq x \leq 5$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -3$; $3 < x < 4$.

Ответ: -3 ; $(3; 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x + 8 \cdot 3^{-x} \geq 9, \\ 2 \log_{(x^2-4x+5)^2} (4x^2+1) \leq \log_{x^2-4x+5} (3x^2+4x+1). \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $3^x + 8 \cdot 3^{-x} \geq 9$.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t + \frac{8}{t} \geq 9; \frac{(t-1)(t-8)}{t} \geq 0,$$

откуда $0 < t \leq 1$ или $t \geq 8$.

При $0 < t \leq 1$ получаем: $0 < 3^x \leq 1$, откуда $x \leq 0$.

При $t \geq 8$ получаем: $3^x \geq 8$, откуда $x \geq \log_3 8$.

Решение первого неравенства исходной системы: $x \leq 0$; $x \geq \log_3 8$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$2 \log_{(x^2-4x+5)^2} (4x^2+1) \leq \log_{x^2-4x+5} (3x^2+4x+1);$$

$$\log_{(x-2)^2+1} (4x^2+1) \leq \log_{(x-2)^2+1} (3x^2+4x+1);$$

$$\begin{cases} x \neq 2, \\ 4x^2+1 \leq 3x^2+4x+1; \end{cases} \begin{cases} x \neq 2, \\ x(x-4) \leq 0, \end{cases}$$

откуда $0 \leq x < 2$ или $2 < x \leq 4$.

Решение второго неравенства исходной системы: $0 \leq x < 2$; $2 < x \leq 4$.

3. Поскольку $0 < \log_3 8 < 2$, получаем решение исходной системы неравенств: $x = 0$; $\log_3 8 \leq x < 2$; $2 < x \leq 4$.

Ответ: 0 ; $[\log_3 8; 2)$; $(2; 4]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 19 \cdot 4^x + 4^{-x} \leq 20, \\ x \cdot \log_{x+3} (7-2x) \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $19 \cdot 4^x + 4^{-x} \leq 20$.

Пусть $t = 4^x$, тогда неравенство примет вид:

$$19t + \frac{1}{t} \leq 20; \frac{(19t-1)(t-1)}{t} \leq 0,$$

откуда $\frac{1}{19} \leq t \leq 1$ или $t < 0$.

При $\frac{1}{19} \leq t \leq 1$ получим: $\frac{1}{19} \leq 4^x \leq 1$, откуда $-\log_4 19 \leq x \leq 0$.

При $t < 0$ получим: $4^x < 0$; нет решений.

Решение первого неравенства исходной системы: $-\log_4 19 \leq x \leq 0$.

2. Решим второе неравенство системы: $x \cdot \log_{x+3}(7-2x) \geq 0$.

Значения x , при которых определено неравенство: $-3 < x < -2$;

$-2 < x < \frac{7}{2}$.

Очевидно, $x = 0$ является решением.

При $x \neq 0$ рассмотрим три случая. Первый случай: $-3 < x < -2$.

Получаем, что $\log_{x+3}(7-2x) < 0$, тогда

$$\begin{cases} -3 < x < -2, \\ x \cdot \log_{x+3}(7-2x) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -3 < x < -2, \\ x \leq 0, \end{cases}$$

откуда $-3 < x < -2$.

Второй случай: $-2 < x < 0$. Получаем, что $x+3 > 1$, тогда

$$\begin{cases} -2 < x < 0, \\ x \cdot \log_{x+3}(7-2x) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} -2 < x < 0, \\ 0 < 7-2x \leq 1; \end{cases} \text{нет решений.}$$

Третий случай: $0 < x < \frac{7}{2}$. Получаем, что $x+3 > 1$, тогда

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{7}{2}, \\ x \cdot \log_{x+3}(7-2x) \geq 0; \end{cases} \begin{cases} 0 < x < \frac{7}{2}, \\ 7-2x \geq 1, \end{cases}$$

откуда $0 < x \leq 3$.

Решение второго неравенства исходной системы: $-3 < x < -2$; $0 \leq x \leq 3$.

3. Поскольку $-3 < -\log_4 19 < -2$, получаем решение исходной системы неравенств: $-\log_4 19 \leq x < -2$; $x = 0$.

Ответ: $[-\log_4 19; -2)$; 0 .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 16^{x-\frac{5}{4}} - 3 \cdot 4^{x-\frac{3}{2}} + 1 \geq 0, \\ \log_2 \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x - 2} \leq 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $16^{x-\frac{5}{4}} - 3 \cdot 4^{x-\frac{3}{2}} + 1 \geq 0$.

Пусть $t = 4^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 12t + 32 \geq 0; (t-4)(t-8) \geq 0,$$

откуда $t \leq 4$ или $t \geq 8$.

При $t \leq 4$ получаем: $4^x \leq 4$, откуда $x \leq 1$.

При $t \geq 8$ получаем: $4^x \geq 8$, откуда $x \geq \frac{3}{2}$.

Решение первого неравенства исходной системы: $x \leq 1$; $x \geq \frac{3}{2}$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\log_2 \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x - 2} \leq 1; 0 < \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x - 2} \leq 2; \begin{cases} \frac{(2x+7)(x-1)}{3x-2} > 0, \\ \frac{(2x-3)(x+1)}{3x-2} \leq 0, \end{cases}$$

откуда $-\frac{7}{2} < x \leq -1$ или $1 < x \leq \frac{3}{2}$.

Решение второго неравенства исходной системы: $-\frac{7}{2} < x \leq -1$; $1 < x \leq \frac{3}{2}$.

3. Решение исходной системы неравенств: $-\frac{7}{2} < x \leq -1$; $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{7}{2}; -1\right]; \frac{3}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_3 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{16}{x^2} \right) \leq 1 \\ \frac{2x^2 + x - 28}{(x-6)^3 + (x-5)^3 - 1} \leq 0 \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $\log_3 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{16}{x^2} \right) \leq 1$.

Пусть $t = x^2$, тогда неравенство примет вид:

$$\log_3 \left(\frac{t}{4} - \frac{16}{t} \right) \leq 1; \quad 0 < \frac{t}{4} - \frac{16}{t} \leq 3; \quad \begin{cases} \frac{t^2 - 64}{4t} > 0, \\ \frac{t^2 - 12t - 64}{4t} \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(t-8)(t+8)}{t} > 0, \\ \frac{(t-16)(t+4)}{t} \leq 0, \end{cases}$$

откуда $-8 < t \leq -4$ или $8 < t \leq 16$.

При $-8 < t \leq -4$ получаем: $-8 < x^2 \leq -4$; нет решений.

При $8 < t \leq 16$ получаем: $8 < x^2 \leq 16$, откуда $-4 \leq x < -2\sqrt{2}$ или $2\sqrt{2} < x \leq 4$.

Решение первого неравенства исходной системы: $-4 \leq x < -2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2} < x \leq 4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{2x^2 + x - 28}{(x-6)^3 + (x-5)^3 - 1} \leq 0; \quad \frac{2x^2 + x - 28}{(x-6)^3 + (x-6)((x-5)^2 + (x-5) + 1)} \leq 0;$$
$$\frac{(2x-7)(x+4)}{(x-6)(2x^2 - 21x + 57)} \leq 0; \quad \frac{(2x-7)(x+4)}{x-6} \leq 0,$$

откуда $x \leq -4$; $\frac{7}{2} \leq x < 6$.

Решение второго неравенства исходной системы: $x \leq -4$; $\frac{7}{2} \leq x < 6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x = -4$; $\frac{7}{2} \leq x \leq 4$.

Ответ: -4 ; $\left[\frac{7}{2}; 4 \right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^{x+\frac{1}{2}} - 28 \cdot 3^{x-1} + 1 \leq 0, \\ \log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1}. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $9^{x+\frac{1}{2}} - 28 \cdot 3^{x-1} + 1 \leq 0$.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство запишется в виде:

$$9t^2 - 28t + 3 \leq 0; (9t-1)(t-3) \leq 0,$$

откуда $\frac{1}{9} \leq t \leq 3$; $\frac{1}{9} \leq 3^x \leq 3$; $-2 \leq x \leq 1$.

Решение первого неравенства исходной системы: $-2 \leq x \leq 1$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1}; \frac{4}{2x+1} \cdot \log_7 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leq \frac{4}{2x+1};$$
$$\frac{4}{2x+1} \cdot \left(\frac{2}{x^2+x} - 1 \right) \leq 0; \frac{2-x-x^2}{(2x+1)(x^2+x)} \leq 0; \frac{(x+2)(x-1)}{x(2x+1)(x+1)} \geq 0,$$

откуда $-2 \leq x < -1$; $-\frac{1}{2} < x < 0$; $x \geq 1$.

Решение второго неравенства исходной системы: $-2 \leq x < -1$;

$-\frac{1}{2} < x < 0$; $x \geq 1$.

3. Решение исходной системы неравенств: $-2 \leq x < -1$; $-\frac{1}{2} < x < 0$; $x = 1$.

Ответ: $[-2; -1)$; $(-\frac{1}{2}; 0)$; 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x + \frac{54}{3^x} \geq 29, \\ \log_{x+3} \left(\frac{x+1}{4} \right) \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $3^x + \frac{54}{3^x} \geq 29$.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t + \frac{54}{t} - 29 \geq 0; \frac{t^2 - 29t + 54}{t} \geq 0; \frac{(t-2)(t-27)}{t} \geq 0,$$

откуда $0 < t \leq 2$; $t \geq 27$.

При $0 < t \leq 2$ получим: $0 < 3^x \leq 2$, откуда $x \leq \log_3 2$.

При $t \geq 27$ получим: $3^x \geq 27$, откуда $x \geq 3$.

Решение первого неравенства исходной системы: $x \leq \log_3 2$; $x \geq 3$.

2. Решим второе неравенство системы: $\log_{x+3} \left(\frac{x+1}{4} \right) \leq 0$.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < x+3 < 1$.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{4} \geq 1, & \begin{cases} x \geq 3, \\ -3 < x < -2; \end{cases} \text{ нет решений.} \\ 0 < x+3 < 1; \end{cases}$$

Второй случай: $x+3 > 1$.

$$\begin{cases} 0 < \frac{x+1}{4} \leq 1, & \begin{cases} -1 < x \leq 3, \\ x > -2, \end{cases} \end{cases}$$

откуда $-1 < x \leq 3$.

Решение второго неравенства исходной системы: $-1 < x \leq 3$.

3. Поскольку $-1 < \log_3 2 < 3$, получаем решение исходной системы
неравенств: $-1 < x \leq \log_3 2$; $x = 3$.

Ответ: $(-1; \log_3 2] \cup \{3\}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3