Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4)\cdot\log_{x+5}(6-x)\le 0, \\ 25^{x^2-2x+10}-0,2^{2x^2-4x-80}\le 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $\log_{4-x}(x+4)\cdot\log_{x+5}(6-x)\le 0$.

Значения x, при которых определено неравенство: $-4<x<3$; $3<x<4$.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $-4<x<3$. Получаем, что $\log_{x+5}(6-x)>0$; $4-x>1$, тогда

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4)\cdot\log_{x+5}(6-x)\le 0, \\ -4<x<3; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_{4-x}(x+4)\le 0, \\ -4<x<3; \end{cases} \quad \begin{cases} 0<x+4\le 1, \\ -4<x<3, \end{cases}$$

откуда $-4<x\le -3$.

Второй случай: $3<x<4$. Получаем, что $\log_{4-x}(x+4)<0$; $\log_{x+5}(6-x)>0$, следовательно, при $3<x<4$ первое неравенство исходной системы верно.

Решение первого неравенства исходной системы: $-4<x\le -3$; $3<x<4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$25^{x^2-2x+10}-0,2^{2x^2-4x-80}\le 0;\ 5^{2x^2-4x+20}\le 5^{-2x^2+4x+80};$$

$$2x^2-4x+20\le -2x^2+4x+80;\ x^2-2x-15\le 0,$$

откуда $-3\le x\le 5$.

Решение второго неравенства исходной системы: $-3\le x\le 5$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-3$; $3<x<4$.

Ответ: -3; $(3;4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x+8\cdot 3^{-x}\ge 9, \\ 2\log_{\left(x^2-4x+5\right)^2}\left(4x^2+1\right)\le \log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right). \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $3^x+8\cdot 3^{-x}\geq 9$.

Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t+\frac{8}{t}\geq 9;\ \frac{(t-1)(t-8)}{t}\geq 0,$$

откуда $0<t\leq 1$ или $t\geq 8$.

При $0<t\leq 1$ получаем: $0<3^x\leq 1$, откуда $x\leq 0$.

При $t\geq 8$ получаем: $3^x\geq 8$, откуда $x\geq \log_3 8$.

Решение первого неравенства исходной системы: $x\leq 0$; $x\geq \log_3 8$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$2\log_{\left(x^2-4x+5\right)^2}\left(4x^2+1\right)\leq \log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right);$$

$$\log_{(x-2)^2+1}\left(4x^2+1\right)\leq \log_{(x-2)^2+1}\left(3x^2+4x+1\right);$$

$$\begin{cases} x\neq 2, \\ 4x^2+1\leq 3x^2+4x+1; \end{cases} \begin{cases} x\neq 2, \\ x(x-4)\leq 0, \end{cases}$$

откуда $0\leq x<2$ или $2<x\leq 4$.

Решение второго неравенства исходной системы: $0\leq x<2$; $2<x\leq 4$.

3. Поскольку $0<\log_3 8<2$, получаем решение исходной системы неравенств: $x=0$; $\log_3 8\leq x<2$; $2<x\leq 4$.

Ответ: 0; $[\log_3 8; 2)$; $(2; 4]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 19\cdot 4^x+4^{-x}\leq 20, \\ x\cdot \log_{x+3}(7-2x)\geq 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $19\cdot 4^x+4^{-x}\leq 20$.

Пусть $t=4^x$, тогда неравенство примет вид:

$$19t+\frac{1}{t}\leq 20;\ \frac{(19t-1)(t-1)}{t}\leq 0,$$

откуда $\frac{1}{19}\leq t\leq 1$ или $t<0$.

При $\frac{1}{19}\leq t\leq 1$ получим: $\frac{1}{19}\leq 4^x\leq 1$, откуда $-\log_4 19\leq x\leq 0$.

При $t<0$ получим: $4^x<0$; нет решений.

Решение первого неравенства исходной системы: $-\log_4 19\leq x\leq 0$.

2. Решим второе неравенство системы: $x\cdot\log_{x+3}(7-2x)\geq 0$.

Значения x, при которых определено неравенство: $-3<x<-2$; $-2<x<\frac{7}{2}$.

Очевидно, $x=0$ является решением.

При $x\neq 0$ рассмотрим три случая. Первый случай: $-3<x<-2$. Получаем, что $\log_{x+3}(7-2x)<0$, тогда

$$\begin{cases}-3<x<-2,\\ x\cdot\log_{x+3}(7-2x)\geq 0;\end{cases}\ \begin{cases}-3<x<-2,\\ x\leq 0,\end{cases}$$

откуда $-3<x<-2$.

Второй случай: $-2<x<0$. Получаем, что $x+3>1$, тогда

$$\begin{cases}-2<x<0,\\ x\cdot\log_{x+3}(7-2x)\geq 0;\end{cases}\ \begin{cases}-2<x<0,\\ 0<7-2x\leq 1;\end{cases}\ \text{нет решений.}$$

Третий случай: $0<x<\frac{7}{2}$. Получаем, что $x+3>1$, тогда

$$\begin{cases}0<x<\frac{7}{2},\\ x\cdot\log_{x+3}(7-2x)\geq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}0<x<\frac{7}{2},\\ 7-2x\geq 1,\end{cases}$$

откуда $0<x\leq 3$.

Решение второго неравенства исходной системы: $-3<x<-2$; $0\leq x\leq 3$.

3. Поскольку $-3<-\log_4 19<-2$, получаем решение исходной системы неравенств: $-\log_4 19\leq x<-2$; $x=0$.

Ответ: $[-\log_4 19;-2)$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases}16^{x-\frac{5}{4}}-3\cdot 4^{x-\frac{3}{2}}+1\geq 0,\\ \log_2\dfrac{2x^2+5x-7}{3x-2}\leq 1.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $16^{x-\frac{5}{4}}-3\cdot 4^{x-\frac{3}{2}}+1\ge 0$.

Пусть $t=4^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2-12t+32\ge 0;\ (t-4)(t-8)\ge 0,$$

откуда $t\le 4$ или $t\ge 8$.

При $t\le 4$ получаем: $4^x\le 4$, откуда $x\le 1$.

При $t\ge 8$ получаем: $4^x\ge 8$, откуда $x\ge \frac{3}{2}$.

Решение первого неравенства исходной системы: $x\le 1$; $x\ge \frac{3}{2}$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\log_2\frac{2x^2+5x-7}{3x-2}\le 1;\ 0<\frac{2x^2+5x-7}{3x-2}\le 2;\ \begin{cases}\frac{(2x+7)(x-1)}{3x-2}>0,\\ \frac{(2x-3)(x+1)}{3x-2}\le 0,\end{cases}$$

откуда $-\frac{7}{2}<x\le -1$ или $1<x\le \frac{3}{2}$.

Решение второго неравенства исходной системы: $-\frac{7}{2}<x\le -1$; $1<x\le \frac{3}{2}$.

3. Решение исходной системы неравенств: $-\frac{7}{2}<x\le -1$; $x=\frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{7}{2};-1\right]$; $\frac{3}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}\log_3\left(\frac{x^2}{4}-\frac{16}{x^2}\right)\le 1\\ \frac{2x^2+x-28}{(x-6)^3+(x-5)^3-1}\le 0\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $\log_3\left(\frac{x^2}{4}-\frac{16}{x^2}\right)\le 1$.

Пусть $t=x^2$, тогда неравенство примет вид:

$$\log_3\left(\frac{t}{4}-\frac{16}{t}\right)\le 1;\ 0<\frac{t}{4}-\frac{16}{t}\le 3;\ \begin{cases}\frac{t^2-64}{4t}>0,\\ \frac{t^2-12t-64}{4t}\le 0;\end{cases}\ \begin{cases}\frac{(t-8)(t+8)}{t}>0,\\ \frac{(t-16)(t+4)}{t}\le 0,\end{cases}$$

откуда $-8<t\le -4$ или $8<t\le 16$.

При $-8<t\le -4$ получаем: $-8<x^2\le -4$; нет решений.

При $8<t\le 16$ получаем: $8<x^2\le 16$, откуда $-4\le x<-2\sqrt{2}$ или $2\sqrt{2}<x\le 4$.

Решение первого неравенства исходной системы: $-4\le x<-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}<x\le 4$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{2x^2+x-28}{(x-6)^3+(x-5)^3-1}\le 0;\ \frac{2x^2+x-28}{(x-6)^3+(x-6)\left((x-5)^2+(x-5)+1\right)}\le 0;$$

$$\frac{(2x-7)(x+4)}{(x-6)\left(2x^2-21x+57\right)}\le 0;\ \frac{(2x-7)(x+4)}{x-6}\le 0,$$

откуда $x\le -4$; $\frac{7}{2}\le x<6$.

Решение второго неравенства исходной системы: $x\le -4$; $\frac{7}{2}\le x<6$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-4$; $\frac{7}{2}\le x\le 4$.

Ответ: -4; $\left[\frac{7}{2};4\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases}9^{x+\frac{1}{2}}-28\cdot 3^{x-1}+1\le 0,\\ \log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}}\le\frac{4}{2x+1}.\end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $9^{x+\frac{1}{2}}-28\cdot 3^{x-1}+1\le 0$.

Пусть $t=3^x$, тогда неравенство запишется в виде:

$$9t^2-28t+3\le 0;\ (9t-1)(t-3)\le 0,$$

откуда $\frac{1}{9}\le t\le 3$; $\frac{1}{9}\le 3^x\le 3$; $-2\le x\le 1$.

Решение первого неравенства исходной системы: $-2\le x\le 1$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}}\le \frac{4}{2x+1};\ \frac{4}{2x+1}\cdot\log_7 7^{\frac{2}{x^2+x}}\le\frac{4}{2x+1};$$

$$\frac{4}{2x+1}\cdot\left(\frac{2}{x^2+x}-1\right)\le 0;\ \frac{2-x-x^2}{(2x+1)(x^2+x)}\le 0;\ \frac{(x+2)(x-1)}{x(2x+1)(x+1)}\ge 0,$$

откуда $-2\le x<-1$; $-\frac{1}{2}<x<0$; $x\ge 1$.

Решение второго неравенства исходной системы: $-2\le x<-1$; $-\frac{1}{2}<x<0$; $x\ge 1$.

3. Решение исходной системы неравенств: $-2\le x<-1$; $-\frac{1}{2}<x<0$; $x=1$.

Ответ: $[-2;-1)$; $\left(-\frac{1}{2};0\right)$; 1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x+\dfrac{54}{3^x}\ge 29, \\ \log_{x+3}\left(\dfrac{x+1}{4}\right)\le 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $3^x + \frac{54}{3^x} \geq 29$.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t + \frac{54}{t} - 29 \geq 0;\ \frac{t^2 - 29t + 54}{t} \geq 0;\ \frac{(t-2)(t-27)}{t} \geq 0,$$

откуда $0 < t \leq 2$; $t \geq 27$.

При $0 < t \leq 2$ получим: $0 < 3^x \leq 2$, откуда $x \leq \log_3 2$.

При $t \geq 27$ получим: $3^x \geq 27$, откуда $x \geq 3$.

Решение первого неравенства исходной системы: $x \leq \log_3 2$; $x \geq 3$.

2. Решим второе неравенство системы: $\log_{x+3}\left(\frac{x+1}{4}\right) \leq 0$.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < x + 3 < 1$.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{4} \geq 1, \\ 0 < x + 3 < 1; \end{cases} \begin{cases} x \geq 3, \\ -3 < x < -2; \end{cases} \text{нет решений.}$$

Второй случай: $x + 3 > 1$.

$$\begin{cases} 0 < \frac{x+1}{4} \leq 1, \\ x + 3 > 1; \end{cases} \begin{cases} -1 < x \leq 3, \\ x > -2, \end{cases}$$

откуда $-1 < x \leq 3$.

Решение второго неравенства исходной системы: $-1 < x \leq 3$.

3. Поскольку $-1 < \log_3 2 < 3$, получаем решение исходной системы неравенств: $-1 < x \leq \log_3 2$; $x = 3$.

Ответ: $(-1; \log_3 2]$; 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3