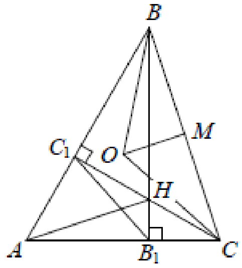
Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60°$.

Решение.



а) В четырёхугольнике AC_1HB_1 углы C_1 и B_1 — прямые, следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность, причём AH — её диаметр. Вписанные углы AC_1B_1 и AHB_1 опираются на одну дугу, следовательно, $\angle AHB_1 = \angle AC_1B_1$.

Углы BC_1C и BB_1C прямые, значит, точки B, C, B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC. Следовательно,

$$\angle AC_1B_1 = 180° - \angle BC_1B_1 = \angle BCB_1.$$

Получаем, что $\angle ACB = \angle AHB_1$.

б) В треугольнике AB_1C_1 диаметр описанной окружности $AH = 4$, откуда $B_1C_1 = AH \cdot \sin\angle BAC = AH \cdot \sin 60° = 2\sqrt{3}$.

В прямоугольном треугольнике BB_1A имеем:

$$AB_1 = AB \cdot \cos\angle BAB_1 = AB \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}AB.$$

В прямоугольном треугольнике CC_1A имеем:

$$AC_1 = AC \cdot \cos\angle CAC_1 = AC \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}AC.$$

Получаем, что $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$.

Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A и $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$, следовательно, они подобны. Тогда $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{AC_1} = 2$. Значит,

$$BC = 2B_1C_1 = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.

Решение.

а) Пусть O — центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, O_1 — центр окружности, касающейся большей боковой стороны и продолжений оснований трапеции (рис. 1).

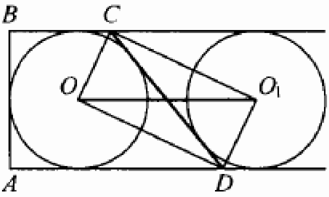


Рис. 1

Точка O лежит на биссектрисах углов BCD и ADC, следовательно,

$$\angle COD = 180° - \frac{1}{2}\angle BCD - \frac{1}{2}\angle ADC = 90°$$

Точка O_1 лежит на биссектрисе угла, смежного с углом BCD, значит, $\angle OCO_1 = 90°$. Аналогично, углы CO_1D и ODO_1 — прямые.

Значит, OCO_1D — прямоугольник, поэтому $CD = OO_1$.

б) Пусть окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается стороны AD в точке P, а стороны CD — в точке M, вторая окружность касается прямой AD в точке Q (рис. 2).

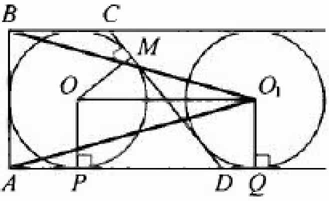


Рис. 2

Радиусы окружностей OP и O_1Q равны половине расстояния между параллельными прямыми AD и BC Получаем, что OO_1QP — прямоугольник, следовательно, $OO_1 = PQ$.

В прямоугольном треугольнике COD имеем:

$$OM = \sqrt{CM \cdot MD} = 10.$$

$$AQ = AP + PQ = OP + OO_1 = OM + CD = 62.$$

В прямоугольном треугольнике AQO_1 имеем:

$$AO_1 = \sqrt{AQ^2 + QO_1^2} = 2\sqrt{986}.$$

Расстояние от вершины прямого угла трапеции до центра второй окружности равно

$$BO_1 = AO_1 = 2\sqrt{986}.$$

Ответ: $2\sqrt{986}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

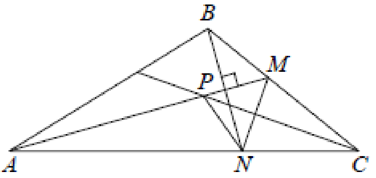
В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AM, пересекает сторону AC в точке N; $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 9$.

а) Докажите, что биссектриса угла C делит отрезок MN пополам.

б) Пусть P — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Найдите отношение $AP : PN$.

Решение.

а) В треугольнике ABC имеем:



$$\frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AC}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},$$

откуда получаем, что $BM=2$, $MC=3$.

В треугольнике ABN биссектриса AM перпендикулярна стороне BN, следовательно, треугольник ABN равнобедренный. Получаем, что $AN=AB=6$, откуда $CN=AC-AN=9-6=3$.

Следовательно, треугольник NCM равнобедренный, а, значит, биссектриса угла C является медианой треугольника NCM и делит отрезок MN пополам.

б) Прямая CP является серединным перпендикуляром к отрезку MN, следовательно, $PM=PN$.

В треугольнике AMC имеем:

$$\frac{AP}{PM}=\frac{AC}{CM}=\frac{9}{3}=3,$$

откуда получаем, что $AP:PN=AP:PM=3$.

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках A и B. Через точку C, лежащую на отрезке AB, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках D и E, причём отрезки CA и CD касаются одной окружности, а отрезки CB и CE — другой.

а) Докажите, что периметр треугольника CDE вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

б) Найдите DE, если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а $AC=8$.

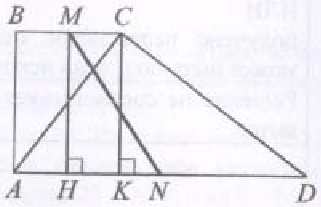
Диагональ AC разбивает трапецию ABCD с основаниями AD и BC, из которых AD большее, на два подобных треугольника.

а) Докажите, что $\angle ABC=\angle ACD$

б) Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, если известно, что $BC=18$, $AD=50$ и $\cos\angle CAD=\dfrac{3}{5}$

Решение.

а) Прямые AD и BC параллельны, поэтому $\angle ACB = \angle CAD$.



Предположим, что $\angle BAC = \angle ACD$, тогда получаем, что прямые AB и CD параллельны и $ABCD$ — параллелограмм. Значит, предположение неверно и $\angle ABC = \angle ACD$.

б) Треугольники ABC и DCA подобны. Следовательно, $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AD}$, откуда

$$AC = \sqrt{BC \cdot AD} = 30.$$

Опустим из вершины C перпендикуляр CK на основание AD. Тогда $AK = AC \cdot \cos\angle CAD = 18 = BC$. Значит, $ABCK$ — прямоугольник. Следовательно,

$$AB = CK = AC \cdot \sin\angle CAD = 24.$$

Пусть M и N — середины оснований AD и BC соответственно, MH — перпендикуляр к AD. Тогда $ABMH$ — прямоугольник. Получаем, что

$$MH = AB = 24;\ NH = AN - AH = AN - BM = 16.$$

В прямоугольном треугольнике MNH имеем:

$$MN = \sqrt{MH^2 + NH^2} = 8\sqrt{13}.$$

Ответ: $8\sqrt{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

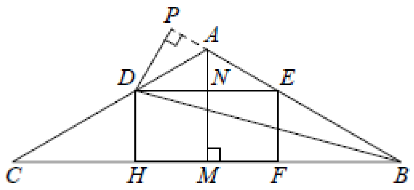
В равнобедренном треугольнике ABC с углом $120°$ при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC, а вершина E — на отрезке AB.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

Решение.

а) Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую AB, тогда $DH = DP$.



В равнобедренном треугольнике EAD угол AED равен $30°$.

В прямоугольном треугольнике EPD

$$DP = \frac{1}{2}DE,$$

откуда получаем, что $FH = 2DH$.

б) Пусть AM — высота треугольника ABC — пересекает ED в точке N. Тогда

$$AM = AB \cdot \sin\angle ABC = 2;\ BC = 2AB \cdot \cos\angle ABC = 4\sqrt{3}.$$

Пусть $DH = EF = x$, тогда $FH = ED = 2x$. Треугольники ABC и AED подобны, следовательно,

$$\frac{AN}{AM} = \frac{ED}{BC};\ \frac{2-x}{2} = \frac{2x}{4\sqrt{3}}, \text{ откуда } x = 3-\sqrt{3}.$$

Значит, площадь прямоугольника $DEFH$ равна

$$DE \cdot DH = 2x \cdot x = 2\left(3-\sqrt{3}\right)^2 = 24 - 12\sqrt{3}.$$

Ответ: $24 - 12\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$.

а) Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

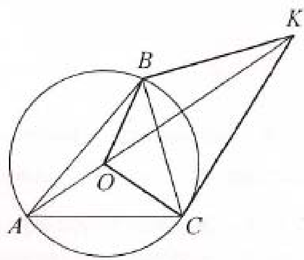
б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$, если $\cos\angle BAC = \frac{3}{5}$, а $BC = 48$.

Решение.

а) Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle OKC = \angle AKC = 90^\circ - \alpha$ и $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$. Треугольник BOC равнобедренный, следовательно,

$$\angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha;$$

$$\angle OBC = \angle OKC.$$



Получаем, что точки O, B, K и C лежат на одной окружности. Следовательно, четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

б) По условию $\cos\angle BAC = \frac{3}{5}$, поэтому $\sin\angle BAC = \frac{4}{5}$. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен

$$OC = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{48}{2\cdot\frac{4}{5}} = 30.$$

Пусть R — радиус окружности, описанной около четырёхугольника $OBKC$. В треугольнике OCK имеем:

$$R = \frac{OC}{2\sin\angle OKC} = \frac{OC}{2\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{OC}{2\cos\alpha} = \frac{30}{2\cdot\frac{3}{5}} = 25.$$

Ответ: 25.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3