

Задачник ЕГЭ-20

Здесь приведены задачи №20 (в прошлом C5), которые предлагались на ЕГЭ по математике, а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с 2009 года.

1. (ЕГЭ, 2015) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{(\infty+; 8] \cap \{2\} \cap [9-; \infty-)}$$

2. (МИОО, 2015) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\frac{8}{5}; \frac{7}{3} -}$$

3. (МИОО, 2015) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 0, \\ 8x^2 + 8y^2 - 16a(x-y) + 15a^2 - 48y - 50a + 72 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{2; 0; \frac{1}{9} -}$$

4. (МИОО, 2015) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции

$$y = \frac{a + 3x - ax}{x^2 + 2ax + a^2 + 1}$$

содержит отрезок $[0; 1]$.

$$\boxed{(\infty+; 8) \cap \left(8; \frac{8}{9\sqrt{2}+2}\right] \cap \left[\frac{8}{9\sqrt{2}-2}; \infty-\right)}$$

5. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(\log_6(x+a) - \log_6(x-a))^2 - 4a(\log_6(x+a) - \log_6(x-a)) + 3a^2 + 4a - 4 = 0$$

имеет ровно два решения.

$$\boxed{(\infty+; 2) \cap \left(2; \frac{8}{3}\right) \cap (2-; \infty-)}$$

6. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$((a-2)x^2 + 6x)^2 - 4((a-2)x^2 + 6x) + 4 - a^2 = 0$$

имеет ровно два решения.

$$(\infty+; 9) \cap \{2; 0\} \cap (1-; \infty-)$$

7. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\left(x + \frac{1}{x-a}\right)^2 - (a+9)\left(x + \frac{1}{x-a}\right) + 2a(9-a) = 0$$

имеет ровно четыре решения.

$$(\infty+; \frac{2}{11}) \cap (\frac{2}{2}; 9) \cap (9; 2) \cap (2-; \infty-)$$

8. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(\operatorname{tg} x + 6)^2 - (a^2 + 2a + 8)(\operatorname{tg} x + 6) + a^2(2a + 8) = 0$$

имеет на отрезке $[0; \frac{3\pi}{2}]$ ровно два решения.

$$\{\frac{\pi}{4}\} \cap (1-; 2-) \cap (2-; 9^{\wedge}-)$$

9. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения параметра a , при которых для любого действительного x выполнено неравенство

$$|3 \sin x + a^2 - 22| + |7 \sin x + a + 12| \leq 11 \sin x + |a^2 + a - 20| + 11.$$

$$(\infty+; 9) \cap \{9-\}$$

10. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения a , при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3 \log_2(3x - 1) + 2a = 0$$

принадлежит отрезку $[1; 3]$.

$$[\frac{2}{2}; \frac{2}{21}-]$$

11. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x+a-5| + |x-a+5|$$

имеет единственное решение.

$$2; 3$$

12. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014) Найдите все значения a , при которых неравенство

$$\log_a \frac{3 + 2x^4}{1 + x^4} + \log_a \frac{5 + 4x^4}{1 + x^4} > 1$$

выполняется для всех действительных значений x .

[8;1]

13. (МИОО, 2014) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|(x - 1)^2 - 2^{1-a}| + |x - 1| + (1 - x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$$

имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a .

[1 = x ; 1 - = v]

14. (МИОО, 2013) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу (4; 19).

(∞+;9] ∩ [8; 5/8]

15. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{7a}{a - 5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a + 17}{a - 5}$$

имеет ровно два различных корня.

(5; 2-) ∩ {0; 1-}

16. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 10a + 5\sqrt{x^2 + 25} = 4|x - 5a| - 8|x|$$

имеет хотя бы один корень.

[2^10 + 5; 2^10 - 5] ∩ {5-}

17. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке $(\frac{\pi}{2}; \pi]$ единственный корень.

{5/7} ∩ [0; ∞-)

18. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a + 7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

[-6; 6]

19. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

$\{0\} \cap (\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

20. (ЕГЭ, 2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(4 \cos x - 3 - a) \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

$(-\infty; 0] \cap [9; \infty)$

21. (ЕГЭ, 2013) Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

$[1; 1-) \cap (1 - \frac{1}{9}; 1]$

22. (ФЦТ, 2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|\cos x + 3 \sin x + a| = a - 3 \cos x - \sin x$$

имеет хотя бы одно решение на промежутке $(\pi; \frac{3\pi}{2}]$.

$[1; 1-)$

23. (МИОО, 2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1+x^2} + a(1+x^2)}{1+x^2 - 2\sqrt{1+x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$(-\infty; \frac{1}{3}] \cap (\frac{1}{3}; \infty)$

24. (МИОО, 2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$$(\infty+; z-] \cap (\varepsilon-; \infty-)$$

25. (МИОО, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых на интервале $(1; 2)$ существует хотя бы одно число x , **не** удовлетворяющее неравенству $a + \sqrt{a^2 - 2ax} + x^2 \leq 3x - x^2$.

$$(\infty+; z/\varepsilon)$$

26. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

$$(\varepsilon; 1-)$$

27. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $1 \leq |x| \leq 3$ не меньше 6.

$$(\infty+; \underline{z} \wedge + z] \cap \{0\} \cap [z-; \infty-)$$

28. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{2}{x+1} = a|x-3|$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет более двух корней.

$$[\varepsilon/z; z/1)$$

29. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

$$(\varepsilon/5; 5/4)$$

30. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a - 6; a]$.

$$\left[\frac{z}{69 \wedge + z}; \frac{z}{9 \wedge - 61} \right]$$

31. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1 - 2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

(1; 2]

32. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

(1; 0)

33. (МИОО, 2012) При каких a уравнение $|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

21/52 или 0

34. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2012) При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня?

$\frac{7}{2\sqrt{-1}}$; $\frac{7}{2\sqrt{+1}}$; 1; 0

35. (Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2012) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y - 2x)(2y - x) \leq 0, \\ \sqrt{(x + a)^2 + (y - a)^2} = \frac{|a + 1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

7/1- или 7/1

36. (Федеральный центр тестирования, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$$

имеет единственное решение.

$\{\frac{91}{8}\} \cap (\frac{8}{1}; \frac{9}{1}]$

37. (Юг, пробный ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + a = 4 \cos x, \\ \sqrt{y} + z^2 = a, \\ (a - 2)^2 = |z^2 - 2z| + |\sin 2x| + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a .

лэн инашэд v хьонн иш $z \in \mathbb{Z} \ni y \in \mathbb{R} \wedge y \neq v$ иш $(z; 0; 2) : \mathbb{Z} \ni u \in \mathbb{R} \wedge 0 = v$ иш $(0; 0; u) + \frac{z}{x}$

38. (МИОО, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$ больше, чем -24 .

$$\left(\frac{7}{62\sqrt{5}}; \frac{7}{62\sqrt{5}} - 3 \right)$$

39. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (4a + 5)x + 3a^2 + 5a < 0, \\ x^2 + a^2 = 25 \end{cases}$$

имеет решения.

$$\left(\frac{7}{2\sqrt{5}}; 0 \right) \cap \left(3 - \frac{7}{2\sqrt{5}}; - \right)$$

40. (ЕГЭ, 2011) Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$3 \text{ или } 2 + \sqrt{69}$$

41. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$$

имеет ровно три различных решения.

$$7/2; 4; 9/2$$

42. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$$7 - 3\sqrt{2}; 4; 1 + 3\sqrt{2}$$

43. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{12 + 4x - x^2} + 2, \\ y = \sqrt{16 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$[-2; 2) \cup (2; 6]$$

44. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (|y| - 4)^2 = 4, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\left\{ \frac{9}{2\sqrt{10}+1}, \frac{9}{2\sqrt{10}-1} \right\}$$

45. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 6|x| + 7 = 5y + 6x^2 + 4a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\left\{ \frac{7}{4} \right\}$$

46. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2011) Найдите все значения параметра b , при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = b$$

существуют и принадлежат отрезку $[2; 17]$.

$$[8; 1]$$

47. (Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2011) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4|y-3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y-3) - x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

$$\{-4; -3\} \cup \left\{ \frac{5}{12} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{12} \right\} \cup \{3\}$$

48. (МИОО, 2011) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\{-2; 3\}$$

49. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\left(\frac{z}{e}; 1\right] \cap [0; 1-)$$

50. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$||x^2 - 2x - 3| - x^2 + 2x - 5| \leq \frac{1}{3} \left(a^2 - \frac{a}{2}\right) - x^2 + 2x + 1$$

имеет единственное целое решение.

$$\left(\frac{z}{z}; \frac{e}{2}\right)$$

51. (МИОО, 2010) Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 7|x - a| - 3x$ на отрезке $[-6; 6]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

$$\left(\infty +; \frac{7}{4}\right] \cap [2; \infty -)$$

52. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

$$\left[\frac{z}{1}; \frac{4}{L}\right)$$

53. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$ меньше 1.

$$\left(\infty +; \frac{z}{9^{L+1}}\right) \cap \left(\frac{1}{1}; \infty -\right)$$

54. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 6x$$

имеет более двух точек экстремума.

$$\left(\frac{z}{z}; \wedge\right) \cap \left(\frac{z}{z}; -; z-\right)$$

55. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 \leq 4$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 4 - a) \leq 0$.

$$1; 1-; \frac{z}{e}; -; \frac{e}{e}; -$$

56. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди значений функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$$

есть ровно одно целое число.

(11:1)

57. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\frac{10x - 2x^2 - a}{3}\right) - \cos(2x + a) = x^2 - 8x - a$$

имеет единственное решение.

91-

58. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$

не имеет действительных решений.

(∞+:91)

59. (МИОО, 2010) Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$ является отрезок.

(7:2-) ∩ [7/6-;8-)

60. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2010) Найдите наименьшее значение параметра a , при котором функция

$$y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

7-

61. (МИОО, 2009) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \geq 0, \\ x - 8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

[8:1]

62. (МИОО, 2009) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$$

имеет ровно восемь различных решений.

(18:19) ∩ (19-;18-)

63. (МИОО, 2009) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$3x + |2x + |a - x|| = 7|x + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

$$(-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$$

64. (МИОО, 2009) Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства

$$|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$$

образуют отрезок длины 1.

$$[2/3; 5/3]$$

65. (МИОО, 2009) Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

$$(-1; 2)$$