Задачник ЕГЭ-20

Здесь приведены задачи №20 (в прошлом С5), которые предлагались на ЕГЭ по математике, а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с 2009 года.

1. (*ЕГЭ, 2015*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{(-\infty; -6] \cup \{2\} \cup [8; +\infty)}$

2. (*МИОО, 2015*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leqslant 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{-\frac{3}{4};\ \frac{4}{3}}$

3. (*МИОО, 2015*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) \leqslant 0, \\ 8x^2 + 8y^2 - 16a(x-y) + 15a^2 - 48y - 50a + 72 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{-\frac{16}{7};\ -2;\ 0;\ 2}$

4. (*МИОО, 2015*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции

$$y = \frac{a + 3x - ax}{x^2 + 2ax + a^2 + 1}$$

содержит отрезок $[0; 1]$.

$\boxed{\left(-\infty; \frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right] \cup \left[\frac{7+2\sqrt{6}}{5}; 3\right) \cup (3; +\infty)}$

5. (*ЕГЭ, 2014*) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(\log_6(x+a) - \log_6(x-a))^2 - 4a\left(\log_6(x+a) - \log_6(x-a)\right) + 3a^2 + 4a - 4 = 0$$

имеет ровно два решения.

$\boxed{(-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)}$

6. (*ЕГЭ, 2014*) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left((a-2)x^2+6x\right)^2-4\left((a-2)x^2+6x\right)+4-a^2=0$$

имеет ровно два решения.

$\boxed{(-\infty;-1)\cup\{0,2\}\cup(5;+\infty)}$

7. (*ЕГЭ, 2014*) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0$$

имеет ровно четыре решения.

$\boxed{(-\infty;-2)\cup(2;3)\cup\left(3;\frac{7}{2}\right)\cup\left(\frac{11}{2};+\infty\right)}$

8. (*ЕГЭ, 2014*) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(\operatorname{tg}x+6)^2-\left(a^2+2a+8\right)(\operatorname{tg}x+6)+a^2(2a+8)=0$$

имеет на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ ровно два решения.

$\boxed{\left(-\sqrt{6};-2\right)\cup(-2;-1)\cup\{4\}}$

9. (*ЕГЭ, 2014*) Найдите все значения параметра a, при которых для любого действительного x выполнено неравенство

$$\left|3\sin x+a^2-22\right|+|7\sin x+a+12|\leqslant 11\sin x+\left|a^2+a-20\right|+11.$$

$\boxed{\{-5\}\cup[5;+\infty)}$

10. (*ЕГЭ, 2014*) Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$

принадлежит отрезку $[1;3]$.

$\boxed{\left[-\frac{17}{2};-\frac{7}{2}\right]}$

11. (*ЕГЭ, 2014*) Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sqrt{x^4+(a-5)^4}=|x+a-5|+|x-a+5|$$

имеет единственное решение.

$\boxed{3;\ 7}$

12. (*Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014*) Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\log_a \frac{3+2x^4}{1+x^4} + \log_a \frac{5+4x^4}{1+x^4} > 1$$

выполняется для всех действительных значений x.

$\boxed{(1; 8]}$

13. (*МИОО, 2014*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|(x-1)^2 - 2^{1-a}\right| + |x-1| + (1-x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$$

имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

$\boxed{a = -1;\ x = 1}$

14. (*МИОО, 2013*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

$\boxed{\left[\frac{3}{2}; 3\right] \cup [6; +\infty)}$

15. (*ЕГЭ, 2013*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{7a}{a-5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a+17}{a-5}$$

имеет ровно два различных корня.

$\boxed{\{-170\} \cup (-2; 5)}$

16. (*ЕГЭ, 2013*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 10a + 5\sqrt{x^2+25} = 4|x-5a| - 8|x|$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{\{-5\} \cup \left[15 - 10\sqrt{2}; 15 + 10\sqrt{2}\right]}$

17. (*ЕГЭ, 2013*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\sin^2 x + 2\cos x + a\right| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ единственный корень.

$\boxed{(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}}$

18. (*ЕГЭ, 2013*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a+7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

$\boxed{-9;\ -5}$

19. (*ЕГЭ, 2013*) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

$\boxed{\left[-\frac{2}{3};\ -\frac{2}{7}\right) \cup \{0\}}$

20. (*ЕГЭ, 2013*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x - 3 - a)\cos x - 2{,}5\cos 2x + 1{,}5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)}$

21. (*ЕГЭ, 2013*) Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

$\boxed{\left[-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (-1; 1]}$

22. (*ФЦТ, 2013*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|\cos x + 3\sin x + a| = a - 3\cos x - \sin x$$

имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

$\boxed{(-1; 1]}$

23. (*МИОО, 2013*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1+x^2} + a(1+x^2)}{1 + x^2 - 2\sqrt{1+x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$\boxed{(-\infty; 3) \cup [4; +\infty)}$

24. (*МИОО, 2013*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$(-\infty; -3) \cup [-2; +\infty)$

25. (*МИОО, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых на интервале $(1; 2)$ существует хотя бы одно число x, **не** удовлетворяющее неравенству $a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leqslant 3x - x^2$.

$(3/2; +\infty)$

26. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$$

выполняется при всех x.

$(-1; 5)$

27. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $1 \leqslant |x| \leqslant 3$ не меньше 6.

$(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [7 + \sqrt{17}; +\infty)$

28. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{2}{x+1} = a|x - 3|$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет более двух корней.

$(1/2; 2/3]$

29. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

$(6/5; 5/4)$

30. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a - 6; a]$.

$\left[\frac{19-\sqrt{45}}{2}; \frac{7+\sqrt{69}}{2}\right]$

31. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

$[7/2; 25/7]$

32. (*ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

$(0; 1)$

33. (*МИОО, 2012*) При каких a уравнение $|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

0 или 25/12

34. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2012*) При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня?

$0;\ -1;\ \frac{-1+\sqrt{2}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$

35. (*Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y-2x)(2y-x) \leqslant 0, \\ \sqrt{(x+a)^2 + (y-a)^2} = \dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

1/2 или −1/4

36. (*Федеральный центр тестирования, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$$

имеет единственное решение.

$\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{8}{15}\right\}$

37. (*Юг, пробный ЕГЭ, 2012*) Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + a = 4\cos x, \\ \sqrt{y} + z^2 = a, \\ (a-2)^2 = |z^2 - 2z| + |\sin 2x| + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a.

$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; 0; 0\right)$ при $a = 0$, где $n \in \mathbb{Z}$; $(2\pi k; 0; 2)$ при $a = 4$, где $k \in \mathbb{Z}$; при прочих a решений нет

38. (*МИОО, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$ больше, чем -24.

$\boxed{\left(\frac{3-\sqrt{29}}{2};\ \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)}$

39. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (4a+5)x + 3a^2 + 5a < 0, \\ x^2 + a^2 = 25 \end{cases}$$

имеет решения.

$\boxed{\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; -3\right) \cup \left(0; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)}$

40. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{\sqrt{65} + 2 \text{ или } 3}$

41. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$$

имеет ровно три различных решения.

$\boxed{7/2;\ 4;\ 9/2}$

42. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$\boxed{7 - 3\sqrt{2};\ 4;\ 1 + 3\sqrt{2}}$

43. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{12 + 4x - x^2} + 2, \\ y = \sqrt{16 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{[-2; 2) \cup (2; 6]}$

44. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-4)^2+(|y|-4)^2=4, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{\frac{6-\sqrt{21}}{6};\ \frac{10+\sqrt{37}}{6}}$

45. (*ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+6|x|+7=5y+6x^2+4a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{7/4}$

46. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения параметра b, при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=b$$

существуют и принадлежат отрезку $[2;17]$.

$\boxed{[1;3]}$

47. (*Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2011*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4|y-3|=12-3|x|, \\ y^2-a^2=3(2y-3)-x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

$\boxed{(-4;-3)\cup\left\{-\frac{12}{5}\right\}\cup\left\{\frac{12}{5}\right\}\cup(3;4)}$

48. (*МИОО, 2011*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+2y+1|\leqslant 11, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{-2;\ 3}$

49. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$\boxed{(-1; 0] \cup [1; 3/2)}$

50. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\left||x^2 - 2x - 3| - x^2 + 2x - 5\right| \leqslant \frac{1}{3}\left(a^2 - \frac{a}{2}\right) - x^2 + 2x + 1$$

имеет единственное целое решение.

$\boxed{(-3/2; 2)}$

51. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 7|x - a| - 3x$ на отрезке $[-6; 6]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

$\boxed{(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)}$

52. (*ЕГЭ, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

$\boxed{(-7/4; 1/2]}$

53. (*ЕГЭ, 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$ меньше 1.

$\boxed{\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{6}}{2}; +\infty\right)}$

54. (*ЕГЭ, 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2\left|x - a^2\right| - 6x$$

имеет более двух точек экстремума.

$\boxed{\left(-2; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; 2\right)}$

55. (*ЕГЭ, 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 \leqslant 4$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 4 - a) \leqslant 0$.

$\boxed{-5/3,\ -3/2,\ -1,\ 1}$

56. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции
$$y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$$
есть ровно одно целое число.

$\boxed{(1; 11)}$

57. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\cos\left(\frac{10x - 2x^2 - a}{3}\right) - \cos(2x + a) = x^2 - 8x - a$$
имеет единственное решение.

$\boxed{-16}$

58. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$
не имеет действительных решений.

$\boxed{(16; +\infty)}$

59. (*МИОО, 2010*) Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5 - x} + |x + a| \leqslant 3$ является отрезок.

$\boxed{(-8; -9/4] \cup (-2; 4)}$

60. (*Москва, репетиционный ЕГЭ, 2010*) Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция
$$y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$$
является неубывающей на всей числовой прямой.

$\boxed{-2}$

61. (*МИОО, 2009*) Найдите все значения a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} \dfrac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \geqslant 0, \\ x - 8 > ax \end{cases}$$
не имеет решений.

$\boxed{[1; 3]}$

62. (*МИОО, 2009*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$$
имеет ровно восемь различных решений.

$\boxed{(-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)}$

63. (*МИОО, 2009*) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$3x + |2x + |a - x|| = 7|x + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

$\boxed{(-\infty; -12] \cup [8; +\infty)}$

64. (*МИОО, 2009*) Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства

$$|2x - a| + 1 \leqslant |x + 3|$$

образуют отрезок длины 1.

$\boxed{-5/2; -19/2}$

65. (*МИОО, 2009*) Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

$\boxed{(-7/2; 1)}$