Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{25}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Решение.

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B.

а) Заметим, что $A=\frac{m}{7}$, $B=\frac{n}{5}$, где m и n — некоторые натуральные числа. Значит, $A-B=\frac{m}{7}-\frac{n}{5}=\frac{5m-7n}{35}$. Если $A-B=\frac{1}{25}$, то $5m-7n=\frac{35}{25}$, что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{25}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 4, 7, 8, 9 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{0+1+2+4+7+8+9}{7}-\frac{1+2+4+7+8}{5}=\frac{31}{7}-\frac{22}{5}=\frac{1}{35}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных пяти оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{7}-\frac{y}{5}=\frac{5x-2y+5z}{35}\le\frac{5x+5z-2\left(\left(x+1\right)+\left(x+2\right)+\ldots+\left(x+5\right)\right)}{35}=$$

$$=\frac{5z-5x-30}{35}\le\frac{5\cdot12-5\cdot0-30}{35}=\frac{6}{7}.$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 12 разность $A-B$ равна $\frac{6}{7}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{6}{7}$.

Ответ: а) нет; б) да; в) $\frac{6}{7}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

На сайте проводится опрос, кого из 134 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 41. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 27?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

Решение.

а) Если рейтинг футболиста на сайте равен 41, то доля голосов, отданных за него, находится в границах от 0,405 до 0,415. Поскольку всего проголосовало 17 посетителей сайта, получаем, что количество голосов, отданных за этого футболиста, не меньше $17\cdot 0{,}405=6{,}885$, но меньше $17\cdot 0{,}415=7{,}055$, то есть равно 7. После того, как Вася проголосовал, доля голосов за первого футболиста стала равна $\frac{7}{18}=0{,}388\ldots$ Значит, его рейтинг стал равен 39.

б) Пусть за 133 футболистов было отдано по одному голосу, а за оставшегося — 67. В этом случае 133 футболиста имеют рейтинг 1, а последний — 34; сумма рейтингов равна 167. Если Вася отдаст свой голос за последнего футболиста, то его рейтинг останется равным 34, а рейтинги всех остальных футболистов станут равны 0. В этом случае сумма рейтингов станет равна 34, то есть уменьшится на 133.

в) Заметим, что для каждого из 134 футболистов доля отданных за него голосов, выраженная в процентах, отличается от рейтинга не более чем на 0,5. Поэтому сумма рейтингов всех футболистов отличается от 100 не более чем на $0{,}5\cdot 134=67$ В частности, эта сумма не может превосходить 167.

Пример, приведённый в предыдущем пункте, показывает, что сумма рейтингов может равняться 167. Значит, наибольшее значение суммы рейтингов всех футболистов — это 167.

Ответ: а) 39; б) да; в) 167.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

а) Можно ли представить число 2014 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?
б) Можно ли представить число 199 в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?
в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

Решение.

а) Например, числа 2006 и 8 имеют одинаковую сумму цифр и в сумме дают 2014.

б) Предположим, что число 199 можно представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр. Пусть одно из этих чисел состоит из a сотен, b десятков и c единиц. Тогда другое число состоит из $1-a$ сотен, $9-b$ десятков и $9-c$ единиц. Суммы цифр этих чисел равны $a+b+c$ и $19-a-b-c$ соответственно. Они имеют разную чётность и не могут быть одинаковыми.

в) Наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой фиксированной суммой цифр, равно сумме пяти наименьших чисел с этой суммой цифр.

Для сумм 1, 2, 3 и 4 имеем соответственно:

$$1+10+100+1000+10\,000=11\,111,$$

$$2+11+20+101+110=244,$$

$$3+12+21+30+102=168,$$

$$4+13+22+31+40=110.$$

Если сумма цифр равна 5 или больше, то обозначим её через a. Тогда наименьшее из таких чисел — как минимум a. Числа с одинаковой суммой цифр дают одинаковые остатки при делении на 9, поэтому идут минимум через 9. Значит, их сумма не меньше чем

$$a+(a+9)+(a+18)+(a+27)+(a+36)=5a+90\geq 115.$$

Получаем, что искомое число равно 110.

Ответ: а) да; б) нет; в) 110.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — оценка в п. *в*; — пример в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 4 письма, или 21 письмо, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?

Решение.

а) Пусть 14 юношей отправили по 4 письма и трое юношей отправили по 21 письму. Тогда суммарно они отправили 119 писем. Эти 119 писем можно распределить между 17 девушками так, чтобы каждая получила ровно 7 писем.

б) Пусть a юношей отправили по 4 письма и b юношей отправили по 21 письму. Эти письма можно поровну распределить между $a+b$ девушками, если суммарное количество писем $4a+21b$ делится на количество девушек. В этом случае число $17b=(4a+21b)-4(a+b)$ также делится на $a+b$. Если $a+b$ не делится на 17, то b делится на $a+b$, что противоречит условиям $a>1$, $b>1$. Значит, $a+b$ делится на 17. Наименьшее натуральное число, делящееся на 17, — это 17. Пример того, что девушек может быть ровно 17, приведён в предыдущем пункте.

в) Пусть a юношей отправили по 4 письма и $n-a$ юношей отправили по 21 письму. Тогда суммарно они отправили $4a+21(n-a)$ писем, а число полученных девушками писем не меньше $0+1+\ldots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$. Получаем $4a+21(n-a)\geq\frac{n(n-1)}{2}$, откуда $21n>\frac{n(n-1)}{2}$; $n<43$. При $n=42$ имеем $882-17a\geq 861$; $17a\leq 21$, что противоречит условию $a\geq 2$.

Если $n=41$, $a=2$, то суммарное количество отправленных писем равно $2\cdot 4+39\cdot 21=827$. Эти письма можно распределить между девушками следующим образом: 40 девушек получили от 0 до 39 писем и ещё одна — 47. Таким образом, наибольшее возможное количество девушек — это 41.

Ответ: а) да; б) 17; в) 41.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Из первых 22 натуральных чисел 1,2, …, 22 выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число k быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа k.

Решение.

а) Если в каждой паре одно число втрое больше другого, то сумма чисел в каждой паре делится на 4. Значит, сумма всех выбранных чисел делится на 4. Число 170 не делится на 4, поэтому такого быть не может.

б) Если $k = 11$, то выбраны все 22 числа от 1 до 22. Их сумма равна 253. С другой стороны, по условию суммы чисел в каждой паре различны и не превосходят 27. Значит, их сумма не превосходит $27 + 26 + \ldots + 17 = 242$. Полученное противоречие показывает, что число k не может быть равным 11.

в) В предыдущем пункте было показано, что k не может равняться 11. Десять пар $(13;14)$, $(11;15)$, $(9;16)$, $(7;17)$, $(5;18)$, $(3;19)$, $(1;20)$, $(2;8)$, $(4;10)$, $(6;12)$ удовлетворяют всем условиям задачи. Значит, наибольшее возможное значение числа k — это 10.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 10.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены правильные ответы во всех пунктах	4
Обоснованно получены верные ответы в пункте *б* и в одном из пунктов *а* или *в*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из пунктов *а* или *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 1 до 21 (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 11?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 10?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Решение.

а) При любой расстановке разность числа 11 и любого соседнего с ним числа меньше 11. Значит, всегда найдутся хотя бы две разности меньше 11.

б) Например, для расстановки 1, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 5, 16, 6, 17, 7, 18, 8, 19, 9, 20, 10, 21, 11 все разности не меньше 10.

в) Оценим значение k. Рассмотрим числа от 1 до 7. Если какие-то два из них стоят рядом или через одно, то найдётся разность меньше 7. Иначе они стоят через два, поскольку всего чисел 21. В этом случае число 8 стоит рядом или через одно с каким-то числом от 2 до 7 и найдётся разность меньше 7.

Таким образом, всегда найдётся разность меньше 7. Все разности могут быть не меньше 6. Например, для расстановки 1, 8, 15, 2, 9, 16, 3, 10, 17, 4, 11, 18, 5, 12, 19, 6, 13, 20, 7, 14, 21 все разности не меньше 6.

Ответ: а) нет; б) да; в) 6.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — пример в п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Целое число S является суммой не менее трёх последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

а) Может ли S равняться 8?

б) Может ли S равняться 1?

в) Найдите все значения, которые может принимать S.

Решение.

а) Число 8 является суммой четырёх последовательных членов арифметической прогрессии. Например, $8=-1+1+3+5$.

б) Пусть число 1 является суммой первых k членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d. Тогда

$$1=\frac{k(2a+d(k-1))}{2};\ 2=k(2a+d(k-1)),$$

значит, число k — делитель 2, что противоречит условию $k\geq 3$.

в) Любое натуральное число $n\geq 2$ является суммой арифметической прогрессии $1-n$; $2-n$; ...; $n-1$; n, состоящей из $2n\geq 4$ членов. Если заменить все члены этой прогрессии на противоположные, то получится арифметическая прогрессия, состоящая из $2n$ членов, сумма которой равна $-n$.

В предыдущем пункте мы показали, что S не может равняться 1. Аналогично можно показать, что S не может равняться -1. Число S может равняться 0, например, для прогрессии -1; 0; 1. Таким образом, S может принимать любые целые значения, кроме -1 и 1.

Ответ: а) да; б) нет; в) любые целые значения, кроме -1 и 1.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — обоснование в п. *в* того, что S может принимать все целые значения (отличные от -1 и 1); — обоснование в п. *в* того, что равенства $S=-1$ и $S=1$ невозможны	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4